روش تفاضل محدود برای استفاده از اختیار خرید (فروش)

فرمول های تحلیلی برای قیمت برای امکان استفاده از اختیار خرید (فروش) در دسترس نیستند. روش های عددی برای قیمت گذاری آنها مورد نیاز است. یک راه معمول این است که معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی (PDE) برای قیمت مربوط به اختیار معامله اروپایی (از نوع بدون امکان استفاده از اختیار خرید (فروش))مشتق گرفته شود و سپس معادله برای اعطای استفاده از اختیار خرید (فروش) تعدیل شود. با این رویکرد، اغلب عامل دیفرانسیل با مشتقات جزئی اساسی با استفاده از یک روش تفاضل محدود گسسته است که ما در زیر به آن می پردازیم. روش تفاضل محدود می تواند به عنوان یک مورد خاص (اما ساده) از روش اساسی محدود دیده شود(روش اصلی محدود را ببینید)

اختیار معامله آمریکایی را می توان هر زمان در طول عمر ان (توجه کنید به اختیار معامله آمریکایی) اعمال کرد در حالی که اختیار معامله برمودایی را می توان در زمان مشخص مجزا در طول عمر آن اعمال کرد. معمولی ترین مثال ها، قرارداد اختیار خرید و قرارداد اختیار فروش آمریکا هستند،اما ویژگی های اختیار آمریکایی و برمودایی می تواند تقریبا به هر اختیار اضافه شود. در ادامه، ما از یک قرارداد اختیار خرید آمریکایی تحت مدل بلک شولز برای مثال استفاده می کنیم. بسیاری از روش های در نظر گرفته را می توان به شیوه ای ساده برای انواع دیگر مدل ها و اختیار ها استفاده کرد که به شرح زیر بحث شده است.

فرمول PDE

ما قیمت اختیار را با V نشان می دهیم، که یک تابع ارزش دارایی اساسی S و زمان t است. آن به عنوان شایع ترین مشکلات آتی در زمان به جای گذشته در نظر گرفته می شود، ما از متغیر معکوس زمان $\tau = T - t$ به جای Tدر مثال زیر استفاده می کنیم. تابع بازده g ارزش اختیار را در تاریخ انقضاء T ، و همچنین اگر اختیار معامله استفاده شود، می دهد. برای مثال، برای قرارداد اختیار فروش، آن $g(S, \tau) = \max\{K - S, 0\},$ است که در آن K قیمت برخورد است.

قیمت V اختیار معامله اروپایی با استفاده از یک PDE سهمی وار داده شده است.

هم با شرایط اولیه هم با شرایط مرزی $V = g$ در $\tau = 0$ است، که در آن L عامل دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی است. در مدل بلک شولز [6]، عامل L تعریف شده است

$$LV = -\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} - rSV_S + rV \qquad (2)$$

برای $S > 0,$ ، که در آن σ نوسانات و r نرخ بهره است (فرمول بلک شولز را ببینید)

در زمانی که مالک یک اختیار معامله آمریکایی یا برمودایی یک پرداختی دریافت می کند که توسط تابع بازده g تعریف می شود. از این رو ارزش V این اختیار نمی تواند کمتر از G باشد، در غیر این صورت یک فرصت آربیتراژ وجود دارد. این امر منجر به محدودیت در استفاده از اختیار معامله می شود

$$V \geq g \qquad (3)$$

که هرزمان اختیار معامله را میتوان استفاده کرد. از آنجا که این نابرابری قیمت V را محدود می کند، آن را در همه جا PDE (1) برآورده نمی کند. در عوض، آن نابرابری را ارضا می کند.

$$V_\tau + LV \geq 0 \qquad (4)$$

هر زمان که رابطه (۳) نگه می دارد .علاوه بر این، هم رابطه (۳) یا معادله (4) تساوی را در هر نقطه نگه میدارد. ترکیب این شرایط برای اختیار معامله آمریکایی منجر به یک مشکل مکمل خطی (LCP) می شود.

$$\begin{aligned} &V_\tau + LV \geq 0, \quad V \geq g, \\ &(V_\tau + LV)(V - g) = 0 \qquad (5) \end{aligned}$$

برای اختیار خرید برمودایی، LCP (۵) زمانی که اختیار معامله اعمال می شود نگه می دارد ، و در زمان های دیگر، PDE (۱) نگه می دارد. احتمال دیگر است تنظیم اختلاف تغییرات برای قیمت V است؛ برای مثال see [1, 18, 27],

در زمان τ، فضا را می توان به دو بخش تقسیم کرد: ناحیه استفاده از اختیار معامله (توقف) $E(\tau)$ و ناحیه نگهداری (ادامه) $H(\tau)$ در ناحیه استفاده از اختیار معامله ، آن مطلوب است که اختیار معامله اعمال شود، در حالی که در

ناحیه نگهداری، آن مطلوب است اعمال نشود. به عنوان مثال، براساس مدل بلک شولز، این ناحیه ها می تواند به صورت ذیل تعریف شود

$$E(\tau) = \{S > 0 : V(S, \tau) = g(S)\},$$
$$H(\tau) = \{S > 0 : V(S, \tau) > g(S)\} \qquad (6)$$

مرز بین این مناطق است مرز استفاده از اختیار معامله $S_f(\tau)$ نامیده می شود. این مرز،مرز آزاد وابسته به زمان است، موقعیتی که قبل از حل LCP (5) یا برخی مشکل برابرشناخته نشده است.

در روش دیگر، قیمت V می تواند به عنوان راه حل مشکل مرزی آزاد محاسبه شود که در آن تابع SF(τ) نیز ناشناخته است. هنگامی که اصل چسباندن صاف منعقد می شود، مشتق اول V در سراسر مرز(SF (τ پیوسته باقی می ماند، و این یک موقعیت مرزی اضافی در SF (τ) می دهد که می تواند برای تعیین مرز آزاد مورد استفاده قرار گیرد. ما اظهار می داریم که اصل چسباندن صاف ، برای مثال، زمانی که مدل $\sigma = 0$ مانند مدل گاما واریانس است (نگاه کنید به مدل واریانس گاما) منعقد نمی شود. در مدل بلک شولز، ما می توانیم این مشکل را برای اختیار فروش تدوین کنیم:

$$V_\tau + LV = 0 \quad \text{for } S > S_f(\tau),$$
$$V(S_f(\tau), \tau) = g(S_f(\tau)) = S_f(\tau) - K,$$
$$V_S(S_f(\tau), \tau) = g_x(S_f(\tau)) = -1 \qquad (7)$$

در شرایط اولیه $V(S, 0) = g(S)$ است. یکی از مزایای این فرمول این است که می تواند یک تقریب خوب برای مرز آزاد SF(τ) بدهد. دامنه $(S_f(\tau), \infty)$ که در آن نیازهای PDE برای برآورده شدن، زمان متفاوت است. این باعث می شود که استفاده از روش تفاضل محدود پیچیده تر شود. رویکرد مورد استفاده در [۳۲، ۴۳] برای استفاده از یک تغییر وابسته به زمان متغیر در چنین روشی است که دامنه محاسباتی مستقل از زمان است. مشکل مرز آزاد (۷) غیر خطی است، و ابداع یک روش راه حل ساده و کارآمد نیز می تواند یک کار چالش برانگیز باشد. ما فرمول زیر را رسیدگی نمی کنیم.

یک فرمول نیمه خطی برای اختیار خرید و فروش بر اساس مدل بلک شولز در [۴، ۲۸] شرح داده شده است. برای قرارداد اختیار فروش منجر به PDE نیمه خطی می شود.

$$V_\tau - LV = q \qquad (8)$$

for $S > 0$, where

$$q(S,\tau) = \begin{cases} 0 & \text{if } V(S,\tau) > g(S) \\ rK & \text{if } V(S,\tau) \le g(S) \end{cases} \qquad (9)$$

این PDE دارای یک فرم ساده است، و در دامنه ثابت (۰، ∞) مطرح شده است. ناپیوستگی های Q می تواند راه حل عددی این مشکل دشوار را مرتفع کند. (۸) PDE با Q منظم با استفاده از روش تفاضل محدود صریح حل شد [۵].

روش تفاضل محدود

در اینجا، ما روش تفاضل محدود فرمولاسیون LCP (۵) را برای اختیار معامله آمریکایی در نظر میگیریم. علاوه بر این، ما به عنوان مثال از عامل L بلک شولز در معادله (۲) استفاده می کنیم. برای بحث در مورد روش تفاضل محدود، [۱، ۱۵، ۳۶، ۳۷] را ببینید.

اول، دامنه (۰، ∞)ا یک فاصله بزرگ (۰، S_{MAX}) و یک وضعیت مرزی مصنوعی است که در S_{MAX} معرفی شده است، تنزل پیدا کرده است. برای اختیار فروش، یک امکان $V(S_{\max}, \tau) = 0$ وجود دارد. در مرحله بعد، ما یک شبکه $S_i,\ i = 0, \ldots, p,$ تعریف می کنیم، به طوری که $S_0 < S_1 < \cdots < S_p = S_{\max}$ ۰= است. ما می پذیریم که شبکه به طور نا متنجانس باشد، مراحل شبکه $\Delta S_{i+1} = S_{i+1} - S_i$ می تواند متفاوت باشد. یک روش جایگزین برای استفاده از یک تغییر و تحول هماهنگ با یک شبکه یکنواخت می باشد (روش تفاضل محدود برای اختیار معامله Barrier را ببینید). در روش تفاضل محدود، ما به دنبال ارزش V در نقاط شبکه Si هستیم. برای صحت بهتر، داشتن شبکه ظریف که در آن V تغییرات بیشتری دارد به طوریکه نزدیک قیمت برخورد K برای قرارداد اختیار خرید و فروش ، و در نزدیکی جایی که قیمت اختیار معامله مورد نظر است،مطلوب است . برای مثال، ما می توانیم یک شبکه ظریف در نزدیکی قیمت برخورد K با استفاده از یک فرمول بسازیم.

$$S_i = \left(1 + \frac{\sinh(\mu(i/p - \xi))}{\sinh(\mu\xi)}\right) K \qquad (10)$$

که در آن μ ثابت به صورت عددی از معادله $S_p = S_{\max}$ حل شده است. با انتخاب ξ، ما میزان پالایش شبکه را کنترل می کنیم.

فضای پذیرفته شده روش تفاضل محدود منجر به یک تقریب می شود

$$(LV)(S_i) \approx -\alpha_i V_{i-1} + (\alpha_i + \beta_i + r)V_i - \beta_i V_{i+1} \quad (11)$$

در نقاط شبکه داخلی $S_i, i = 1, \ldots, p-1$، که در آن ارزش نقطه شبکه از V توسط $V_i = V(S_i)$نشان داده میشود. ضرایب αi و βi به صورت ذیل تعریف می شود

$$\alpha_i = \frac{\sigma^2 S_i^2}{\Delta S_i(\Delta S_{i+1} + \Delta S_i)} - \frac{r S_i}{\Delta S_{i+1} + \Delta S_i},$$

$$\beta_i = \frac{\sigma^2 S_i^2}{\Delta S_{i+1}(\Delta S_{i+1} + \Delta S_i)} + \frac{r S_i}{\Delta S_{i+1} + \Delta S_i} \quad (12)$$

اگر $\Delta S_i \leq \sigma^2 S_i / r,$ و در غیر این صورت توسط

$$\alpha_i = \frac{\sigma^2 S_i^2}{\Delta S_i(\Delta S_{i+1} + \Delta S_i)},$$
$$\beta_i = \frac{\sigma^2 S_i^2}{\Delta S_{i+1}(\Delta S_{i+1} + \Delta S_i)} + \frac{r S_i}{\Delta S_{i+1}} \quad (13)$$

این دلیلی برای تعویض فرمول دوم بر اساس تفاوت یک طرفه برای V_S زمانی که شرایط بالا همیشه ضرایب مثبت αi (و βi) را نگه ندارد، می باشد. فرمول دوم دقت کمتری دارد. معمولا، آن برای استفاده آنها فقط برای چند ناحیه شبکه در نزدیکی $S = 0$ لازم است ، و این یک تاثیر جزئی (یا هیچ) در دقت و صحت دارد. ما یک بردار میکشیم

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \vdots \\ V_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p+1} \qquad (14)$$

و ماتریس $p+1 \times p+1$ با $A_{i+1,i} = -\alpha_i, \; A_{i+1,i+1} = \alpha_{i-1} + \beta_{i-1} + r,$ و $A_{i+1,i+2} = -\beta_{i-1}$ for $i = 1, \ldots, p-1$

سطر اول و آخر بستگی به وضعیت مرزی دارد. برای مثال، برای قرارداد اختیار فروش، ما ردیف های صفر را برای آنها انتخاب میکنیم. بردار ماتریس ضرایب AV درنتیجه یک برداری است که شامل تقریب LV در نقاط شبکه است.

روش تفاضل محدود فضا منجر به LCP نیمه گسسته برای تابع برداری V (τ) داده شده در ذیل می شود

$$\begin{aligned} &\mathbf{V}_\tau - \mathbf{AV} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{V} \geq \mathbf{g}, \\ &(\mathbf{V}_\tau - \mathbf{AV})^T (\mathbf{V} - \mathbf{g}) = 0 \end{aligned} \qquad (15)$$

برای $\tau \in (0, T]$. ارزش اولیه $\mathbf{V}(0)$ و بردار G شامل ارزش نقطه شبکه از تابع بازده g است.در بالا و زیر، نابرابری جزء نگهداری شده است.

روش تفاضل محدود از LCP ارزش V را فقط در نقاط شبکه می دهد. بنابراین، هرهیچ تقریب ساده از ناحیه استفاده از اختیار معامله (τ) E و مرز آزاد (τ) SF می تواند تنها همان دقت رابرای اندازه مراحل شبکه داشته باشد.

تقریب گسسته زمان تابع بردار V در زمان τ^N که $0 = \tau^0 < \tau^1 < \cdots < \tau^m = T$. در زیر، V در زمان تقریبی τ^n توسط $\mathbf{V}^n = \mathbf{V}(\tau^n)$ نشان داده شده و گام زمانی بین τ^n و τ^{n+1} با $\Delta\tau^{n+1} = \tau^{n+1} - \tau^n$ نشان داده است. روش متداول گام زمانی θ منجر به دنباله مجرای LCP_s می شود.

$$\begin{aligned} &\mathbf{BV}^{n+1} \geq \mathbf{b}^{n+1} \quad \mathbf{V}^{n+1} \geq \mathbf{g}, \\ &(\mathbf{BV}^{n+1} - \mathbf{b}^{n+1})^T (\mathbf{V}^{n+1} - \mathbf{g}) = 0 \end{aligned} \qquad (16)$$

برای $n = 0, 1, \ldots, m-1$ با بردار اولیه $\mathbf{V}^0 = g$ که در آن ما با استفاده از نمادگذاری داریم

$$\mathbf{B} = \mathbf{I} + \theta^{n+1}\Delta\tau^{n+1}\mathbf{A},$$
$$\mathbf{b}^{n+1} = \left[\mathbf{I} + (1-\theta^{n+1})\Delta\tau^{n+1}\mathbf{A}\right]\mathbf{V}^{n} \qquad (17)$$

گزینه های مختلف θ^{n+1} منجر به استفاده روش متداول زیر می شود : روش صریح اویلر $\theta^{n+1} = 0$، روش گرنک - نیکلسون $\theta^{n+1} = 1/2$، و روش اویلر ضمنی $\theta^{n+1} = 1$. طرح Rannacher با در نظر گرفتن چند (مثلا چهار) مرحله اولیه با استفاده از روش ضمنی اویلر $(\theta_n = 1,\ n = 1, 2, 3, 4)$ و سپس با استفاده از روش گرنک - نیکلسون $(\theta_n = 1/2,\ \ n = 5, \ldots, m)$ (روش گرنک - نیکلسون نگاه کنید) به دست آمده است.

معمولا، مرز اعمال $S_F(\tau)$ به سرعت به سررسید نزدیک و به آرامی از آن دور می شود. برای مثال، برای یک قرارداد اختیار فروش براساس مدل بلک شولز مرز مانند زیر در نزدیکی سررسید $\tau = 0$ رفتار می کند.

$$S_f(\tau) \approx K\left(1 - \sigma\sqrt{-\tau \log \tau}\right) \qquad (18)$$

به این دلیل، با گام های زمانی یکنواخت، خطاهای گسسته زمان در طول اولین مراحل زمانی نسبت به مراحل بعدی بسیار بزرگتر است. این نشان می دهد که آن، برای استفاده مراحل زمانی متغیر سود مند است. به تدریج با افزایش طول مراحل زمان، اشتباهات می تواند equidistributed تر باشد. به این ترتیب، دقت بهتر را می توان با یک عدد داده شده از مراحل زمانی به دست آورد. بنابراین، ما می توانیم تلاش محاسباتی برای رسیدن به دقت مورد نظر را کاهش دهیم.

یکی از راه های ممکن انتخاب مراحل زمانی است به طوری که مرز اعمال تقریبا به همان مقدار در هر مرحله حرکت می کند.